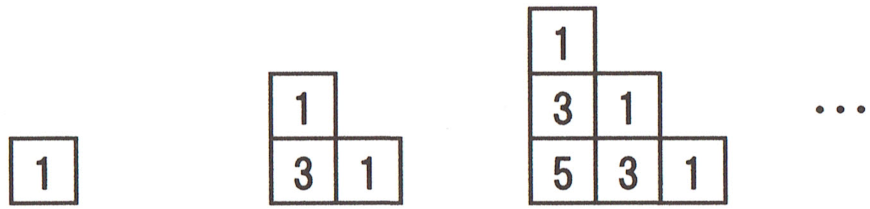
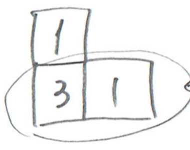
$n+1$ 番目の数字の合計と、n 番目の数字の合計の差を n を使って表しましょう。



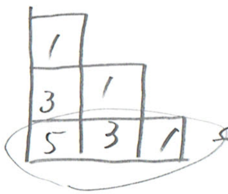
1番目　　2番目　　3番目

1番目、2番目を見比べると、2番目は、



←1番目についか。と見えます。

2番目と3番目を見比べると、3番目は、



←2番目についか と見えます。

つまり、$n+1$番目は、n番目に一番下の段が追加になっています。

それでは、一番下の段の和を求めましょう。

$n+1$番目の一番下の段は、

となっています。

$(2n+1)+(2n-1)+\cdots\cdots+1$ に逆順にしたものと足しあわせて、2で割って求めます

$$\begin{array}{rl} & (2n+1)+(2n-1)+\cdots\cdots+1 \\ + & 1+3+\cdots+(2n-1)+(2n+1) \\ \hline & \underbrace{(2n+2)+(2n+2)+\cdots\cdots+(2n+2)}_{n+1\text{個}} \end{array}$$

$$\frac{(2n+2)(n+1)}{2}=(n+1)^2$$

よって、$n+1$番目の数字の合計と、n番目の数字の合計の差は、

$$n^2+2n+1$$